Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Life Sciences und
Facility Management

IAS Institut für
Angewandte Simulation

Vorbereitungskurs Mathematik

© Prof. Dr. T. Ott, Dr. P. Kauf ottt@zhaw.ch, kauf@zhaw.ch

Voraussetzungen Mathematik

Ziel dieses Vorbereitungskurses ist es, die Grundlagen der Mathematik so weit aufzuarbeiten, dass der Einstieg in die Mathematikkurse an der ZHAW ohne grössere Mühen klappt. Der Kurs kann in seiner Kürze Lücken aufdecken und stopfen, nicht aber eine Berufsmatur ersetzen. Die Themen orientieren sich am Stoff der naturwissenschaftlichen Berufsmatura. Der Inhalt dieses Vorkurs wird als verbindliche Grundlage für die Mathematikvorlesung vorausgesetzt:

- Algebraische Grundlagen und Termumformungen.
- Lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.
- Lineare Gleichungssysteme.
- Logarithmische Gleichungen und Exponentialgleichungen.
- Lineare Funktionen.
- Potenzfunktionen (inkl. quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen).
- Logarithmische Funktionen und Exponentialfunktionen.
- Geometrie: Trigonometrie am Dreieck.
- Trigonometrische Funktionen.

Ein Grossteil des Stoffes (und noch andere Themen) findet sich im handlichen Lehrbuch:

M. Knorrenschild
Vorkurs Mathematik
Carl Hanser Verlag, Leipzig, ISBN 978-3-446-41263-7.

Dieses Skript enthält einige Hinweise zu Lehrtexten in diesem Buch, die man selbständig durcharbeiten kann. Ein weiteres, etwas umfangreicheres Lehrbuch, ist:

Jürgen Wendeler
Vorkurs der Ingenieurmathematik
Verlag Harry Deutsch , ISBN 3-8171-1670-5.

das als Grundlage für das Selbststudium dienen mag.

Der Ablauf eines Morgens wird jeweils so sein, dass es kurze Theorieblöcke gibt, gefolgt von einigen Übungen, wo jede(r) selbständig ihre/seine mathematische Kompetenz vertiefen kann. Wie vieles anderes ist Mathematik auch eine Frage der Übung. Deswegen ist selbständiges Üben ein wichtiger Teil dieses Vorbereitungskurses. Selbstverständlich steht Euch der Dozent dabei beratend zur Seite. Am Anfang jedes Kurstages teilt der Dozent Euch die Lernziele des Tages mit. Es ist nützlich, sich am Abend diese Lernziele nochmals durch den Kopf gehen zu lassen, um zu sehen, wie weit die Ziele erreicht wurden.

Viel Spass und Erfolg! Wir freuen uns auf Euch!

Inhaltsverzeichnis

1 Erster Kursmorgen

1.1 Lernziele

Arithmetische Ausdrücke und Termumformungen.

- Ihr kennt die vier arithmetischen Grundoperationen und die dazugehörigen Bezeichnungen.
- Ihr kennt die Grundgesetze und Klammerregeln für die Addition/Subtraktion.
- Ihr könnt mit Brüchen richtig rechnen und könnt insbesondere Brüche richtig kürzen.
- Ihr kennt das Distributivgesetz und könnt ausmultiplizieren und ausklammern.
- Ihr kennt die binomischen Formeln und könnt sie anwenden zur vereinfachten Berechnung von Quadraten etc.

Lineare Gleichungen.

- Ihr wisst, wie man eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten löst.
- Ihr habt Übung im Lösen von Textaufgaben, die zu einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten führen.
- Ihr wisst, wie man ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten löst.
  Ihr kennt dafür die Substitutionsmethode und das Additions/Eliminationsverfahren.

1.2 Die Grundoperationen

1. Addition:
   Summand plus Summand gleich Summe

$$a + b = c \tag{1}$$

2. Subtraktion:
   Minuend minus Subtrahend gleich Differenz

$$a - b = c \tag{2}$$

3. Multiplikation:
   Faktor mal Faktor gleich Produkt

$$a \cdot b = c \tag{3}$$

4. Division:
   Dividend durch Divisor gleich Quotient

$$a : b = c \tag{4}$$

1.2.1 Variablen - Platzhalter

Viele mathematische Rechnungen werden nicht mit eigentlichen Zahlen durchgeführt, sondern mit so genannten Variablen. Ein Buchstabe dient dabei als Platzhalter für eine beliebige Zahl. Man spricht darum auch von der Buchstabenrechnung. Der grosse Vorteil ist dabei die Allgemeinheit, die eine mathematische Aussage erhält (allgemeine Gesetzmässigkeit). In der Gleichung

$$a + b = b + a \tag{5}$$

darf man zum Beispiel für a und b beliebige Zahlen einsetzen und die Gleichung bleibt immer richtig. So gilt etwa $7 + 5 = 5 + 7$ oder $2/3 + 1.45 = 1.45 + 2/3$ usw.

1.2.2 Gesetze für die Grundoperationen

1. Kommutativgesetz für Addition und Multiplikation:

$$a + b = b + a \tag{6}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{7}$$

2. Assoziativgesetz für Addition und Multiplikation:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{8}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{9}$$

3. Klammern auflösen:

$$+(a + b - c) = +a + b - c \tag{10}$$

$$-(a + b - c) = -a - b + c \tag{11}$$

   Insebsondere: $-(-1) = +1$.

1.3 Rechnen mit Brüchen

Das Rechnen mit Brüchen lernt man schon in der Primarschule. Trotzdem sieht man - besonders beim Kürzen - selbst noch auf der Hochschulebene zum Teil haarsträubende Fehler. Hier sind noch einmal die wichtigsten Gesetze zusammengefasst.

1. Addition/Subtraktion:
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd} \tag{12}$$

2. Multiplikation:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{13}$$

3. Division:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{14}$$

4. Doppelbrüche:
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \tag{15}$$

5. Erweitern:
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \tag{16}$$

6. Kürzen:
$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \tag{17}$$

Versucht jede dieser Regeln in euren eigenen Worten auszudrücken!

►
Ein Achtung zum Kürzen und Erweitern: der Faktor, um den man kürzt/erweitert, muss sich auf den ganzen Zähler und den ganzen Nenner beziehen. **Falsch** sind z.B.
$$\frac{a+b}{cb} = \frac{a}{c} \tag{18}$$
und
$$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c} \tag{19}$$
Merkspruch: *Durch Summen kürzen nur die Dummen*!
Dagegen **richtig** ist
$$\frac{ab+cb}{bd} = \frac{a+c}{d}. \tag{20}$$

1.3.1 Distributivgesetz und binomische Formeln

Bei vielen arithmetischen Rechnungen ist es nützlich, wenn man Ausdrücke entweder ausmultipliziert oder ausklammert. Das grundlegende Gesetz hierfür ist das Distributivgesetz:
$$a \cdot (b+c) = ab + ac \tag{21}$$
Beachte, dass bei der Multiplikation der Multiplikationspunkt meistens weggelassen wird. Die Ausdrücke dürfen durchaus komplizierter sein. Z.B.
$$a^2b^2c - abc^2 = abc \cdot (ab - c) \tag{22}$$

oder

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac+bc+ad+bd \tag{23}$$

Als Sonderfälle der letzten Rechnung ist es nützlich, sich die binomischen Formeln zu merken:

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{24}$$

und

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{25}$$

Schliesslich sei hier an dieser Stelle noch auf einen häufigen Fehler hingewiesen:

▶
Es gilt $(-x)^2 = x^2 \geq 0$ aber $-x^2 = -(x^2) \leq 0$. Beispiel: $(-2)^2 = 4$ aber $-2^2 = -4$.
◀

1.4 Lineare Gleichungen

1.4.1 Eine Unbekannte

Die häufigsten und einfachsten Gleichungen sind lineare Gleichungen mit einer Unbekannten, d.h. Gleichungen vom Typ

$$a\cdot x = b\ . \tag{26}$$

Auflösen nach x ergibt:

$$x = \frac{b}{a}. \tag{27}$$

Häufig sind lineare Gleichungen versteckt in einer Textaufgabe. Dazu ein Beispiel:

Textaufgabe:
Die alte Abfüllanlage der Getränke-Firma *Schwepsi Koala* füllt 50 Flaschen in 5 min. Die neue Anlage braucht für 50 Flaschen nur noch 3 min. Wie lange geht es bis 50 Flaschen gefüllt sind, wenn beide Anlagen in Betrieb sind?

Lösung:
x : Zeit zum Abfüllen von 50 Flaschen, wenn beide Anlagen in Betrieb sind.
Überlegung: Leistung Anlage 1: 10 Flaschen pro Min, Leistung Anlage 2: 50/3 Flaschen pro Minute. Gesamte Leistung: $(10 + 50/3) = 80/3$ Flaschen pro Minute. Also:

$$\frac{80}{3}\cdot x = 50 \quad \rightarrow \quad x = \frac{50}{80/3} = \frac{150}{80} = 1.875$$

Es geht 1.875 Minuten.

1.4.2 Lineare Gleichungssysteme

Manchmal hat man es im Leben mit mehr als einer Unbekannten zu tun, z.B. mit zwei. Die allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit 2 Unbekannten (hier x und y) ist:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= a_3 \\ b_1x + b_2y &= b_3 \end{aligned} \tag{28}$$

Am einfachsten löst man dieses System mit der Substitutionsmethode. Dabei lösen wir eine der beiden Gleichungen nach einer Unbekannten auf und substituieren das Resultat dann in der zweiten Gleichung. Damit erhalten wir eine einfache lineare Gleichung in der zweiten Unbekannten. Diese Gleichung lösen wir direkt und setzen das Ergebnis in der Gleichung für die erste Unbekannte ein, die damit auch bestimmt ist. Versuchen wir es an einem Beispiel!

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 4x + 7y &= 3 \end{aligned} \tag{29}$$

Lösen wir die erste Gleichung nach x auf, so erhalten wir

$$x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3y}{2}. \tag{30}$$

Das setzen wir in der zweiten Gleichung ein und erhalten:

$$4(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3y}{2}) + 7y = 3. \tag{31}$$

Aufgelöst nach y sehen wir, dass $y = 1$. Dieses Ergebnis setzen wir ein in $x = \frac{1}{2} - \frac{3y}{2}$ und erhalten $x = -1$.
Überzeuge dich selbst, dass $x = -1$ und $y = 1$ das Gleichungssystem lösen.

Eine zweite Möglichkeit, ein solches Gleichungssystem zu lösen, bietet das Eliminationsverfahren. Dafür wird eine Gleichung geeignet multipliziert und zwar so, dass eine Unbekannte eliminiert wird, wenn man die Gleichungen zusammenaddiert. Beispielsweise kann man die erste Gleichung in (29) mit -2 multiplizieren.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \qquad | \cdot (-2) \\ 4x + 7y &= 3 \end{aligned} \tag{32}$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} -4x - 6y &= -2 \\ 4x + 7y &= \ \ 3 \end{aligned} \tag{33}$$

Wenn man beide Gleichungen addiert, dann erhält man

$$y = 1 \tag{34}$$

und durch Einsetzen von $y = 1$ in einer der Gleichungen ergibt sich $x = -1$.

Übrigens: Lineare Ungleichungen
Vielleicht habt ihr in eurer Schulzeit auch schon Ungleichungen, wie etwa

$$3x - 3 < 5x \tag{35}$$

behandelt. Das Lösen von Ungleichungen ist etwas aufwendiger als bei Gleichungen, da man oft eine Fallunterscheidung vornehmen mus. Im Studium spielen Ungleichungen keine sehr grosse Rolle, man sollte aber wissen, was damit gemeint ist. Mehr darüber findet man im Buch von Knorrenschild (S.108-111).

1.5 Aufgaben (inkl. Lösungen)

Wir lösen jeweils eine gezielte Auswahl von Aufgaben aus dem Lehrbuch von J. Wendeler. Natürlich steht es euch frei, noch zusätzliche Aufgaben zu lösen. Die Lösungen stehen am Ende des Buches zur Verfügung und erlauben eine Lernkontrolle.

Diese Woche lösen wir insbesondere die folgenden Aufgaben (Angaben beziehen sich auf obiges Lehrbuch):

Aufgaben zu Termumformungen etc.

Aufgabe 1: 1.9 a),b),e),f)
Aufgabe 2: 1.10 a),b),c),g),h),i)
Aufgabe 3: 2.1 a),e),h),i)
Aufgabe 4: 2.3 b),f),h),i)
Aufgabe 5: 2.4 a),d),e),h)
Aufgabe 6: 2.5 a),c),g),h)
Aufgabe 7: 2.6 a),b),e),f),g),h)
Aufgabe 8: 2.16 a),b)

Aufgabe 1
Rechne aus (ohne TR):
a) $\frac{5}{6} + \frac{2}{15} - \frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{4}{15} - \frac{3}{4}$
e) $\frac{p}{6} - \frac{2p}{3} + \frac{11p}{14}$ f) $\frac{a}{3b} - \frac{ab}{5} + \frac{b}{15a}$

Aufgabe 2
Vereinfache (kürzen):
a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{25}$ b) $\frac{10}{21} \cdot \frac{42}{55}$ c) $\frac{10}{13} : \frac{30}{11}$
g) $\frac{2a^2b}{3c} \cdot \frac{6c^2}{a}$ h) $\frac{3mp^2}{5n} \cdot \frac{30}{m^2} \cdot \frac{n^2}{9p}$ i) $\frac{4x^2}{7yz} : \frac{12x}{21y^2z}$

Aufgabe 3
Löse Klammern auf und vereinfache:
a) $(3 + 8) - (6 - 10) - (5 - 4)$
e) $a - (b - 2a) - (3a + 4b)$
h) $(5ab + 4bc + 3ac) - (4ab - 2bc) - (6bc + 2ac)$
i) $\left(a - \frac{b}{2} + \frac{3}{8}c\right) - \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{3}{8}c\right)$

Aufgabe 4
Multipliziere und vereinfache:
b) $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{7}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{9}{14} - \frac{2}{7}\right)$
f) $\left(\frac{3}{5}x - \frac{2}{15}y\right) \cdot \frac{10}{3}$
h) $\frac{ab}{c}\left(\frac{2}{a} - 5\frac{c}{b} + \frac{bc}{a}\right)$
i) $4(2x - 5(3 + x) + 6(x - 2))$

Aufgabe 5
Multipliziere aus und vereinfache:
a) $(8+5)(7-2)$
d) $(2a+5b)(3a-b)$
e) $(m-2n)(4m+7n)-(3m+n)(m-5n)$
h) $[(2u-v)(u+v)-(u+3v)(4u-v)]\cdot(u-v)$

Aufgabe 6
Berechne:

a) $(x-2y)^2$	c) $(3m+2n)^2$
g) $(m-1)^2-(1-m)^2$	h) $(4x-3y)^2-(4x+3y)^2$

Aufgabe 7
Verwandle in Produkte:

a) x^2-6x+9	b) $4a^2+24ab+36b^2$
e) m^2-n^2	f) $9x^2-36y^2$
g) $\frac{25}{4}a^2-\frac{1}{16}b^2$	h) $0.01a^2-b^2$

Aufgabe 8
Zerlege in Faktoren:
a) $4a^2-12ab+9b^2$
b) $\frac{1}{16}m^2p+mnp+4n^2p$
c) $\frac{9}{4}x^2-\frac{25}{4}y^2$

Aufgaben zu Gleichungen

Aufgabe 1: 4.1, 4.3, 4.4
Aufgabe 2: 4.6, 4.15 (Textaufgaben)
Aufgabe 3: 4.8, 4.9
Aufgabe 4: 4.17, 4.22
Aufgabe 5: 4.26 (mit Substitutions- und Eliminationsverfahren)
Aufgabe 6: 4.27 (mit Substitutions- oder Eliminationsverfahren)
Aufgabe 7: 4.34 (mit Substitutions- oder Eliminationsverfahren)

Aufgabe 1
a) $2x+6=5x-9$
b) $\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}=\frac{x}{4}-\frac{5}{12}$
c) $5ax-4ab=3ax+2ab$

Aufgabe 2
a) Der Umfang eines Dreiecks ist 169 cm. Die erste Seite ist um 28 cm grösser als die zweite. Die zweite Seite ist um 12 cm kürzer als die dritte. Wie lang sind die Seiten?
b) Ein PKW fährt um 10:00 in A ab mit $v_1 = 80\ km/h$ Richtung B. Von B fährt um 11:00 ein LKW ab Richtung A mit $v_2 = 50\ km/h$. Wann und wo treffen sich die Fahrzeuge? ($\bar{AB} = 275\ km$)

Aufgabe 3
a) $20 + (14 - (8 - 3x)) = x + (13 + (15 + x))$
b) $3(x + 4) + 5(x + 2) = 18 - 2(6 - 2x)$

Aufgabe 4
a) $\frac{2x+1}{15} - \frac{11-3x}{10} = \frac{x+5}{6}$
b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned} 4x + y &= 3 \\ 3x - 4y &= 26 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\begin{aligned} 4.1x + 3y &= 4.05 \\ -1.8x + 0.6y &= 4.74 \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (nichtlinear)

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + 6y &= -1 \\ \frac{5}{x} \cdot 6 - \frac{9}{2}y &= 4 \end{aligned}$$

Lösungen

Termumformungen:

Aufgabe 1
a) 2/3 b) $-37/180$ e) $\frac{2p}{7}$ f) $\frac{5a^2-3a^2b^2+b^2}{15ab}$

Aufgabe 2
a) 3/10 b) 4/11 c) 11/39 g) $4abc$ h) $\frac{2np}{m}$ i) xy

Aufgabe 3
a) 14 e) $-5b$ h)$a(b+c)$ i) $\frac{3}{4}(a-b+c)$

Aufgabe 4
b) 3/7 f) $2x-\frac{4}{9}y$ h) $2\frac{b}{c}-5a+b^2$ i) $12(x-9)$

Aufgabe 5
a) 65 d) $6a^2+13ab-5b^2$ e) $m^2+13mn-9n^2$ h) $-2u^3+12uv^2-8u^2v-2v^3$

Aufgabe 6
a) $x^2-4xy+4y^2$ c) $9m^2+12mn+4n^2$ g) 0 h) $-48xy$

Aufgabe 7 (alles mit binomishen Formeln!)
a) $(x-3)^2$ b) $(2a+6b)^2$ e) $(m+n)(m-n)$ f) $(3x+6y)(3x-6y)$
g) $(\frac{5}{2}a+\frac{1}{4}b)(\frac{5}{2}a-\frac{1}{4}b)$ h) $(0.1a+b)(0.1a-b)$

Aufgabe 8 (alles mit binomischen Formeln!)
a) $(2a-3b)^2$ b) $p(\frac{1}{4}m+2n)^2$ c) $\frac{1}{4}(3x+5y)(3x-5y)$

Gleichungen:

Aufgabe 1:
a) $x=5$ b) $x=3/7$ c) $x=3b$ (gesucht ist x, gegeben sind a und b.

Aufgabe 2
a) Seien a (1. Seite), b (2. Seite), c (3. Seite) die drei Seiten. Es gilt $169=a+b+c$, also $c=169-a-b$. Nun ist $a=b+28$ und $b=c-12$. Für c gilt aber $c=169-a-b$. Somit haben wir ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten. Die Lösung ist $a=71cm$, $b=43cm$ und $c=55cm$.

b) Hinweis: Zeichnung! Sei t_1 die Reisezeit des Autos, t_2 die Reisezeit des LKW's. Es gilt $v_1t_1+v_2t_2=275$. Der LKW fährt eine Stunde später ab, also gilt $t_1=t_2+1$. Mit $v_1=80$, $v_2=50$ ergibt sich somit die Gleichung $80(t_2+1)+50t_2=275$. Diese Gleichung ergibt $t_2=1.5$. Daraus erhalten wir $t_1=2.5$, Treffzeit $12:30$. Da der PKW in 2.5 Stunden entsprechend $200km$ zurücklegt, ist der Treffpunkt 200 km von A entfernt.

Aufgabe 3
a) $x=2$ b) $x=-4$

Aufgabe 4
a) $x=7$ b) $x=\frac{ab}{a-b}$

Aufgabe 5: $x = 2, y = -5$
Aufgabe 6: $x = -1.5, y = 3.4$
Aufgabe 7 (1. Gleichung nach y auflösen, dann einsetzen in 2. Gleichung): $x = 9.69, y = -0.2$

2 Zweiter Kursmorgen

2.1 Lernziele

Quadratische Gleichungen, Potenzen und Wurzeln.

- Ihr wisst, wie man quadratische Gleichungen löst und könnt dieses Wissen schnell und sicher anwenden (Auflösungsformel).
- Ihr wisst, was Potenzen sind und kennt die Rechengesetze für Potenzen. Ihr önnt diese schnell und sicher anwenden.
- Ihr kennt die Grundbegriffe der Wurzelrechnung und wisst, wie man Wurzeln als Potenzen ausdrückt.
- Ihr habt Übung im Umgang mit den Potenzgesetzen.

2.2 Quadratische Gleichungen

Als "quadratische Gleichungen" bezeichnet man Gleichungen mit einer Unbekannten, in denen die Unbekannte im Quadrat auftritt, z.B.

$$3x^2 = 5x - 1$$

Je nach Koeffizienten kann eine quadratische Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung haben. Die Lösungen lassen sich nach einem einfachen Rezept herleiten. Das Rezept gibt es in verschiedenen Varianten, eine davon ist folgende:

1. Man bringt alle Terme auf die linke Seite der Gleichung und sortiert sie dort in der Reihenfolge **quadratischer Term – linearer Term – konstanter Term.**
   Im Fall der Gleichung (2.2):

   $$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

2. Nun vergleicht man mit der Grundform einer quadratischen Gleichung,

   $$ax^2 + bx + c = 0 \tag{36}$$

   Die Koeffizienten nennt man a, b, c. In unserem Beispiel:

   $$a = 3, \quad b = -5, \quad c = 1$$

   (Achte auf die Vorzeichen!)

3. Die Lösungen berechnen sich jetzt nach der Formel

   $$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 &= \tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned} \tag{37}$$

   In unserem Beispiel:

   $$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{+5+\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3} = 1.43 \\ x_2 &= \tfrac{+5-\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3} = 0.23 \end{aligned}$$

4. Ob es zwei, eine oder gar keine Lösung gibt, entscheidet sich durch das, was unter der Wurzel steht, also

   $$D = b^2 - 4ac \tag{38}$$

   - Ist $D > 0$, gibt es zwei verschiedene Lösungen.
   - Ist $D = 0$, geben beide Formeln das gleiche => nur eine Lösung.
   - Ist $D < 0$, können wir die Wurzel nicht ziehen => keine Lösung.

   D nennt man **Diskriminante**.
   In unserem Zahlenbeispiel hätte man also zum Vornherein sagen können:
   $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 13 > 0$ => zwei verschiedene Lösungen.

In Spezialfällen ist es allerdings vorteilhaft, das Rezept nicht zu benutzen. Es gibt zwei Spezialfälle:

1. $b = 0$: Dann lautet die Gleichung

$$ax^2 + c = 0 \tag{39}$$

Diese Gleichung hat einfach die Lösung

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a} \tag{40}$$

falls $-c/a \geq 0$. Andernfalls gibt es keine Lösung.

2. $c = 0$: Falls das Absolutglied null ist, kann man die Gleichung in Faktoren zerlegen:

$$ax^2 + bx = x \cdot (ax + b) = 0 \tag{41}$$

Dann ist entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$. Die Lösungen sind also

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{-b}{a} \tag{42}$$

Desweiteren kann man Gleichungen bei denen nur 4-te und 2-te Potenzen vorkommen, auf quadratische Gleichungen reduzieren.
Beispiel:

$$x^4 - 4x^2 + \frac{7}{4} = 0 \tag{43}$$

Setze $y = x^2$:

$$y^2 - 4y + \frac{7}{4} = 0 \tag{44}$$

mit den Lösungen:

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{9}}{2} \quad => \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{7/2},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{1/2} \tag{45}$$

2.3 Potenzen

Eine Summation gleicher Summanden können wir durch eine Multiplikation abkürzen:

$$7 + 7 + 7 + 7 = 4 \times 7, \quad \text{4mal der gleiche Summand}$$

Nun gehen wir eine Stufe "höher" und fassen auch entsprechende Multiplikationen zusammen:

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4, \quad \text{4mal der gleiche Faktor}$$

2.3.1 Bezeichnungen

7^4 ist eine "Potenz";
lies: "sieben hoch vier";
die 7 ist die "Basis";
die 4 ist der "Exponent".
Spezialfall Exponent 2: 7^2 liest man "7 (im oder zum) Quadrat".

2.3.2 Exponenten < 0

Von 7^3 kommt man auf 7^2, indem man durch 7 dividiert:

$$\frac{7^3}{7} = 7^2$$

Dividieren wir noch ein paar Mal durch 7, und wir erkennen, was Exponenten, die kleiner als 1 sind, bedeuten:

$$\begin{aligned}
\frac{7^2}{7} &= 7 = 7^1 \\
\frac{7^1}{7} &= 1 = 7^0 \\
\frac{7^0}{7} &= \frac{1}{7} = \frac{1}{7^1} = 7^{-1} \\
\frac{7^{-1}}{7} &= \frac{1}{7^2} = 7^{-2}
\end{aligned}$$

►

- Eine Zahl hoch 1 ist gleich der Zahl selber.
- Eine Zahl hoch 0 ist gleich 1, egal, was es für eine Zahl ist.
- Ein Minuszeichen im Exponenten bedeutet “1 durch …”.

◄

Insbesondere kann man mit negativen Exponenten Brüche vermeiden, was manchmal zur Übersichtlichkeit beiträgt. Nicht zuletzt bei Masseinheiten.

2.3.3 Rechenregeln für Potenzen

Es gibt ein paar Rechenregeln für Potenzen:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{46}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{47}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{48}$$

2.4 Wurzeln

Wurzeln sind eine von zwei Umkehrungen des Potenzierens (Die andere Umkehrung sind Logarithmen).

“Umkehrung” heisst u.a., dass sich die beiden Operationen gegenseitig aufheben:

$$\sqrt[2]{a^2} = a, \quad \text{bzw.} \quad (\sqrt[2]{a})^2 = a \tag{49}$$

Vorsicht verlangt beim Wurzelziehen das Vorzeichen. Teilweise gibt es zwei Lösungen. 9 hat z.B. zwei Wurzeln, $+3$ und -3, denn beide diese Zahlen geben 9, wenn man sie quadriert. Ob beide Lösungen sinnvoll sind, ist manchmal eine Frage des Kontextes. Normalerweise meint man mit $\sqrt{a}$ den positiven Wert und

gibt den negativen explizit mit $-\sqrt{a}$ an.
Nebst Quadratwurzeln gibt es natürlich auch andere Wurzeln; man nennt sie $n-$te Wurzeln und schreibt

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \text{d.h.} \quad x^n = a \tag{50}$$

Wurzeln kann man auch als Exponenten schreiben, nur sind die Exponenten diesmal keine ganzen Zahlen. Das lässt sich z.B.folgendermassen einsehen: Wenn wir die Gleichung

$$9 = x^5$$

beidseitig mit $\frac{1}{5}$ potenzieren, finden wir

$$9^{\frac{1}{5}} = (x^5)^{\frac{1}{5}} = x^{5 \cdot \frac{1}{5}} = x^1 = x$$

Da andrerseits aus der ursprünglichen Gleichung

$$x = \sqrt[5]{9}$$

hervorgeht, ist offenbar

$$\sqrt[5]{9} = 9^{\frac{1}{5}}$$

oder allgemeiner ausgedrückt

$$\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}} \tag{51}$$

Auch für Wurzeln gibt es einige Rechenregeln, analog denen für Brüche oder für Potenzen. Man muss sie aber gar nicht explizit nennen, denn dank der Gleichung oben kann man jede Wurzel in eine Potenz umwandeln und dann die Rechenregeln für Potenzen einsetzen. Diese gelten nämlich für allgemeine Exponenten.

2.5 Potenzen mit allgemeinen Exponenten

Eine Potenz mit einem allgemeinen rationalen Exponenten $n = k/l$ hat folgende Bedeutung:

$$a^n = a^{k/l} = \sqrt[l]{a^k} \tag{52}$$

Die Gesetze für Potenzen gelten allgemein für beliebige Exponenten. Hier nochmals eine Zusammenstellung:

Potenzregeln:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{53}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{54}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{55}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \text{insbesondere:} \quad \frac{1}{a^m} = a^{-m} \tag{56}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n \tag{57}$$

Die Gesetze gelten für allgemeine Exponenten m und n. Sie müssen also nicht ganzzahlig sein. Nichtganzzahlige rationale Exponenten erhält man über die Beziehung:

$$a^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{a^k}, \tag{58}$$

wobei k und l natürliche Zahlen sein sollen.

Übrigens: Summenzeichen (wird im Studium behandelt, ist nicht Vorwissen)
Was bedeutet:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i \tag{59}$$

Wie schreibt man

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... \tag{60}$$

in Kurzform?
Falls dir das Summenzeichen nicht geläufig ist, informiere dich selbständig darüber im Buch von Knorrenschild (S.27-29). Das Summenzeichen wird uns im Studium immer wieder begegnen.

Übrigens: $p - q-$Formel (ist für uns nicht relevant)
Statt unserer Formel für quadratische Gleichungen findet man manchmal auch die $p-q-$Formel. Beide Formeln ergeben aber natürlich das gleiche und sind nah verwandt miteinander. Mehr darüber findet man im Buch von Knorrenschild (S.94-95).

2.6 Aufgaben

Die Angaben in Klammern beziehen sich auf die entsprechenden Aufgaben im Buch:
Jürgen Wendeler
Vorkurs der Ingenieurmathematik
Verlag Harry Deutsch , ISBN 3-8171-1670-5.
In diesem Buch gibt es eine umfangreichere Aufgabensammlung mit Lösungen.

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1 (8.2)

a) $2x^2 - 32 = 0$ b) $1.5x^2 + 216 = 0$
c) $\frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{5}x = 0$ d) $\frac{x+5}{4} = \frac{6}{x+5}$

Aufgabe 2 (8.3)

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ d) $x^2 + 5x - 26 = 0$
f) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

Aufgabe 3 (8.1)
a) $4x^2 + 3x = 0$ b) $0 = 4x^2 - 1$

Aufgabe 4 (8.7)
Ein Rechteck hat die Seiten 18 cm und 16 cm. Wie gross sind die Seiten eines Rechecks mit gleicher Fläche und dem Umfang 72 cm?

Aufgabe 5 (8.6)
a) $x^4 - 14.44x^2 = 0$ b) $2x^4 + 66x^2 - 1568 = 0$

Aufgabe 6
Eine Gruppe Studenten mietete einen Bus für total 60 Franken. Da vier Studenten erkrankten, stieg der Kostenanteil für die übrigen um je 2.50 Franken. Wie viele Studenten waren ursprünglich in der Gruppe?

Potenzen und Wurzeln

Aufgabe 1 (6.1)
Addiere bzw. subtrahiere (ohne Rechner):

a) $4 \cdot 3^5 - 8 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^5$ d) $3a^2b - 5ab^2 + 4a^2b + 8ab^2 - 4a^2b$
f) $(x+2y)m^3 - (x+y)m^3 + (x-y)m^3$

Aufgabe 2 (6.2)
Rechne aus:

a) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3$ f) $a^{x+4} \cdot a^{x-3}$
g) $(-a)^{3n} \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^{4-n}$ n) $(5/16 \cdot a^2b^3c^2) : (5/4 \cdot a^6b^5c^5)$
o) $\frac{a^3b}{cd^4} \cdot \frac{c^3d}{a^2b^2} \cdot \frac{b^3d^3}{c^3}$ k) $a^{-2}x^4 \cdot ax^{-3}$

Aufgabe 3 (7.1)
Berechne:
a) $4\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b}$ b) $2\sqrt[3]{x} - 8\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

Aufgabe 4 (7.2)
a) $\sqrt[5]{8a^2} \cdot \sqrt[5]{4a^3}$ b) $\sqrt{20x^5} \cdot \sqrt{45x}$
e) $\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

Aufgabe 5 (7.5)
Bringe alles unter die Wurzel und vereinfache:
a) $xy\sqrt[3]{y}$ b) $a\sqrt[4]{1/a}$
c) $\frac{u}{v}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$

Aufgabe 6 (7.7)
Berechne:
a) $\sqrt{\sqrt[3]{144}}$ c) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}$

Aufgabe 7
Vereinfache (ohne Bruch):

$$\frac{a^2b^{-3}x^{-3}y}{a^{-2}b^7x^{-4}y^{-3}}$$

Aufgabe 8 (Prüfungsaufgabe aus 1.Semesteprüfung UI09)

Vereinfache so weit als möglich (Resultat ohne Wurzelzeichen und Brüche):
a) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x}\right)^6$ b) $\frac{c^{-6}b^5}{x^{-4}y^{-3}} : \frac{x^{-7}y^{-4}}{c^{-3}b^6}$

2.7 Lösungen

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1 (8.2)
a)$x_{1,2} = \pm 4$, b) keine Lösung, c) $x_1 = 0, x_2 = 7/10$,
d) $x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{24}$; forme dazu erst die Gleichung um durch Multiplikation mit $(x+5)$. Das ergibt $x^2/4 + \frac{10}{4}x + 25/4 - 6 = 0$

Aufgabe 2 (8.3)
a) $x_1 = 3, x_2 = -1$, d) $x_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{25+104})/2$,
f) $x_1 = a, x_2 = (b + c - a)/2$. Hier faktorisiert man am einfachsten zuerst die linke Seite zu $(a + x)(a - x)$ und erkennt, dass somit a eine erste Lösung ist, $x_1 = a$. Nun dividiert man die ganze Gleichung mit $(a - x)$ und löst die lineare gleichung $a + x = b + c - x$. Dies liefert x_2.

Aufgabe 3 (8.1)
a) $x_1 = 0, x_2 = -3/4$, b) $x_{1,2} = \pm 1/2$

Aufgabe 4 (8.7)
$x = 24$ cm, $y = 12$ cm. Man erhält dies, indem man überlegt: $2x + 2y = 72$ (Umfang) und $x \cdot y = 18 \cdot 16$ (Fläche). Dies ist ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 72 \\ x \cdot y &= 18 \cdot 16 = 288 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $y = 288/x$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, ergibt dies die Gleichung

$$2x + 2\frac{288}{x} = 72.$$

Diese multiplizieren wir beidseitig mit x, dividieren alles durch 2 und bringen die Gleichung auf die Grundform für quadratische Gleichungen:

$$x^2 - 36x + 288 = 0$$

Mithilfe der Auflösungsformel ergibt dies: $x_1 = 12$ und $x_2 = 24$. Zugehörig ergeben sich nun $y_1 = 288/x_1 = 24$ und $y_2 = 288/x_2 = 12$. Also haben wir ein Rechteck mit Seitenlängen 12cm und 24cm (stehend oder liegend).
Aufgabe 5 (8.6)
a) $x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm 3.8$,
b) $x_{1,2} = \pm 4$. Dies sind die einzigen zwei Lösungen, da $\sqrt{-49}$ nicht existiert.

Aufgabe 6
12 Studenten. Man erhält dies, indem man überlegt, dass $n \cdot k = 60$, wobei k der Preis und n die ursprüngliche Anzahl Studenten. Mit dem Fehlen von 4 Teilnehmern eralten wir $(n-4)\cdot(k+2.50) = 60$, da die Kosten dieselben bleiben. Nun haben wir ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten, das wir auflösen können:

$$\begin{aligned} n \cdot k &= 60 \\ (n-4) \cdot (k + 2.50) &= 60 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $k = 60/n$, was wir in die zweite Gleichung einsetzen können. Dies ergibt:

$$(n-4)\cdot(\frac{60}{n}+2.50) = 60$$

Die linke Seite wird ausmultipliziert und wir erhalten

$$60 + 2.5n - \frac{240}{n} - 10 = 60.$$

Wir vereinfachen, indem wir beidseitig 60 abziehen, und dann mit n multiplizieren:

$$2.5n^2 - 10n - 240 = 0$$

Mithilfe der Auflösungsformel erhalten wir $x_1 = 12$ und $x_2 = -8$. Die zweite Lösung macht keinen Sinn, da es sich um eine Anzahl Studierender handeln soll. Der zugehörige ursprüngliche Preis pro Studierendem errechnet sich zu $60/12 = 5$.

Potenzen und Wurzeln

Aufgabe 1 (6.1)
a) $3^5 = 243$, d) $3ab(a+b)$, f) xm^3

Aufgabe 2 (6.2)
a) $3^9 = 19683$, f) a^{2x+1}, g) a^{2n+6}, n) $1/4 \cdot a^{-4}b^{-2}c^{-3}$, o) ab^2/c, k) x/a

Aufgabe 3 (7.1)
a) $3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$, b) $7(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$

Aufgabe 4 (7.2)
a) $2a$. Dieser Typus Aufgabe wird am besten so gelöst, dass man erst die Wurzel als Potenz schreibt, dann mit den Potenzregeln die passenden Terme zusammennimmt und dann vereinfacht. In diesem Fall:

$$(8a^2)^{1/5} \cdot (4a^3)^{1/5} = (8a^2 \cdot 4a^3)^{1/5} = (32a^5)^{1/5} = 32^{1/5} \cdot a^{5/5} = 2a$$

b) $30x^3$, e) Beachte: $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$. Die Lösung ist $a - b$

Aufgabe 5 (7.5)
Hinweis: $a = (a^n)^{1/n}$, d.h. wenn man eine Zahl unter die Wurzel nimmt, muss man sie entsprechend potenzieren.
a) $\sqrt[3]{x^3y^4}$, b) $\sqrt[4]{a^3}$, c) $\sqrt[3]{u^2/v}$

Aufgabe 6 (7.7)
Hinweis: Das ganze in Potenzen umschreiben und dann mit den Potenzgesetzen arbeiten.
a) $\sqrt[3]{12}$, c) $\sqrt[3]{a}$

Aufgabe 7
$a^4b^{-10}xy^4$

Aufgabe 8
a)x^3 b)$b^{11}c^{-9}x^{11}y^7$

3 Dritter Kursmorgen

3.1 Lernziele

Logarithmen und Exponentialgleichungen

- Ihr wisst, was Logarithmen sind und könnt dies in Worten erklären.
- Ihr kennt die fundamentalen Gesetze für Logarithmen und könnt sie anwenden.
- Ihr erkennt Exponentialgleichungen und könnt sie lösen.

Funktionen allgemein:

- Ihr könnt in Worten erklären, was eine Funktion ist.
- Ihr kennt die drei Darstellungsarten von Funktionen (als Formel, als Wertetabelle, als Graph).
- Ihr kennt die Eigenschaften von linearen Funktionen (Steigung, y-Achsenabschnitt, Definition durch zwei Punkte) und könnt lineare Funktionen schnell und sicher skizzieren.

3.2 Logarithmen

Ich gebe dir heute 2 Franken und verdopple jedes Jahr dein Guthaben. Nächstes Jahr hast du also 4 Franken, dann 8 Franken usw. Nach wie vielen Jahren hast du mindestens 10000 Franken? Man kann das Problem durch die Gleichung

$$10000 = 2^n, \quad n = ?$$

ausdrücken. Wie soll man diese Gleichung nach n auflösen? Wir brauchen eine Umkehrung des Potenzierens. *Eine* Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen, aber das ist hier nicht die richtige, denn wir suchen den Exponenten, während die Wurzel die Basis liefert:

$$2 = \sqrt[n]{10000}$$

Was wir brauchen, ist eine Umkehrung des Potenzierens, die den Exponenten liefert, und das ist der "Logarithmus" (sprich: "Logar–I–thmus"). Der Logarithmus soll also z.B. die Antwort geben auf die Frage: "2 hoch wie viel gibt 10000?" (Die Wurzel wäre die Antwort auf die Frage "wie viel hoch n gibt 10000?") Man schreibt das

$$n = \log_2(10000)$$

und liest: "Logarithmus von 10 000 zur Basis 2".

Beispiel:
$\log_{10}(1000) = ?$. Man frage sich: "10 hoch wie viel gibt 1000?". Die Antwort ist offenbar "3". Damit gilt: $\log_{10}(1000) = 3$.

Da wir im Zehnersystem rechnen, ist der Logarithmus zur Basis 10 besonders wichtig:

▶
Den Logarithmus zur Basis 10 nennt man den "Zehner–Logarithmus" oder "dekadischen Logarithmus". Man schreibt ihn oft

$$\lg(x) = \log_{10}(x) \tag{61}$$

Wenn du einfach "log" liest, ohne Angabe einer Basis, ist auch der 10er–Logarithmus gemeint, denn dieser ist insgesamt am weitesten verbreitet; die Abkürzung "lg" wird nicht durchgehend benützt.
◀

Man könnte auch sagen: der 10er–Logarithmus gibt an, wie viele Nullen eine Zahl hat (so wie man es für die Exponentialschreibweise –siehe oben– verwendet). Nur gibt es auch "gebrochene" Anzahl Nullen: 100 hat 2 Nullen ($\log(100) = 2$), 1000 hat 3 Nullen ($\log(1000) = 3$), und 300, das zwischen 100 und 1000 liegt, hat irgendwie "zwischen 2 und 3 Nullen", nämlich etwa deren $2\frac{1}{2}$, da $\log(300) = 2.48$.

Eine andere wichtige Basis ist die Eulersche Zahl $e = 2.71828....$ Der zugehörige Logarithmus heisst **natürlicher Logarithmus** und wird in der Regel mit $\ln(x)$ abgekürzt. Die Zahl e mag vielleicht nicht gerade den Eindruck einer natürlichen Basiswahl machen, sie ist aber in der Mathematik von mindestens gleicher Bedeutung wie etwa die Kreiszahl π (näheres dazu erfahrt ihr im Studium).

3.2.1 Rechenregeln für Logarithmen

Es gibt gewisse Regeln, die den Umgang mit Logarithmen erleichtern:

1. Die **logarithmische Identität** ist eigentlich nur eine Wiederholung der Definition des Logarithmus. Trotzdem lohnt es sich, sie sich gut zu merken, da sie oft für rote Köpfe sorgt:
$$a^{\log_a b} = b \tag{62}$$

2. Der **Basis–Wechsel**:
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{\lg(b)}{\lg(a)} \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \tag{63}$$
Diese Regel braucht man für den Umgang mit "krummen" Logarithmen, womit man solche meint, die nicht 10 (oder e) als Basis haben. Insbesondere sind krumme Logarithmen auf den meisten Taschenrechnern nicht zu finden.

3. Aus einem Produkt wird eine Summe:
$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) \tag{64}$$

4. Aus einem Quotienten wird eine Differenz:
$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \tag{65}$$

5. Aus einer Potenz wird ein Produkt
$$\log(a^b) = b \cdot \log(a) \tag{66}$$

Man sieht diese Regeln anhand von Beispielen ein, z.B.:

$$\lg(10) + \lg(100) = 1 + 2 = 3 = \lg(1000) = \lg(10 \cdot 100)$$

Formale mathematische Beweise lassen sich auch fhren, man findet diese (z.T.) auch auf der Wikipedia Seite zum Logarithmus.

3.2.2 Umgang mit Logarithmen

Logarithmen sind in der Wissenschaft und in der Ingenieurpraxis allgegenwärtig und sehr wichtig. Im Umgang mit ihnen braucht es zweierlei:

- Ein konzeptionelles Verständnis: Man muss sich im Klaren sein, was ein Logarithmus ist (er beantwortet Fragen der Art: "x hoch wie viel gibt y?").
- Übung beim Anwenden der Regeln: Bei vielen Anwendungen wird einfach ein mathematischer Ausdruck durch Anwenden der Regeln umgeformt. Dabei ist es wichtig, dass man diese Regeln automatisiert hat und nicht immer darüber nachdenken muss.

Meistens kann man einen Logarithmus nicht einfach im Kopf ausrechnen, sondern nur mit einem Taschenrechner. Für 10er Logarithmen sollte man aber in der Lage sein, anzugeben, zwischen welchen zwei ganzen Zahlen ein Logarithmus liegt. So gilt etwa:
$$4 < \log(30'000) < 5$$
da $10^4 = 10'000$ und $10^5 = 100'000$ und $10'000 < 30'000 < 100'000$.

3.3 Exponentialgleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung bei der die Unbekannte (nur) im Exponenten auftritt. Beispiel:

$$2^{x+2} = 3 \cdot 3^{2x}$$

Man löst nach der Unbekannten x auf durch systematisches Anwenden der Logarithmus-Gesetze:

1. Anwenden des Logarithmus:
$$\log(2^{x+2}) = \log(3 \cdot 3^{2x})$$
2. Anwenden von Gesetz 3:
$$\log(2^{x+2}) = \log(3) + \log(3^{2x})$$
3. Anwenden von Gesetz 5:
$$(x+2) \cdot \log(2) = \log(3) + 2x \cdot \log(3)$$
4. Ausmultiplizieren:
$$x \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(2) = \log(3) + 2x \cdot \log(3)$$
5. Nach x sortieren:
$$x \cdot \log(2) - 2x \cdot \log(3) = \log(3) - 2 \cdot \log(2)$$
6. x ausklammern:
$$x \cdot (\log(2) - 2 \cdot \log(3)) = \log(3) - 2 \cdot \log(2)$$
7. Nach x auflösen:
$$x = \frac{\log(3) - 2 \cdot \log(2)}{\log(2) - 2 \cdot \log(3)}$$

Das Resultat kann man zuletzt auch noch vereinfachen, falls erforderlich.

$$x = \frac{\log(3) - 2 \cdot \log(2)}{\log(2) - 2 \cdot \log(3)} = \frac{\log(3) - \log(2^2)}{\log(2) - \log(3^2)} = \frac{\log(3/4)}{\log(2/9)} = \log_{\frac{2}{9}}(3/4)$$

Für ein numerisches Resultat braucht man dann aber den Taschenrechner.

3.4 Funktionen allgemein

Funktionen erfassen *allgemeine Zusammenhänge* zwischen verschiedenen Grössen. Zum Beispiel könnte eine Funktion einen zeitlichen Ablauf erfassen, etwa die Temperatur in einem ungeheizten Gebäude. Man spricht dann von der Temperatur (Grösse 1 oder Funktionswert) als Funktion der Zeit (Grösse 2 oder Argument der Funktion). Diese Zusammenhänge haben häufig die Form einer Gleichung. Solche Gleichungen sollte man aber nicht als Gleichung für einzelne Werte ansehen, sondern sie stellen die Grösse 1 eben in Abhängigkeit (als Funktion) der Grösse 2 dar. In diesem Sinne wird ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den beiden Grössen formuliert.

3.4.1 Was ist eine Funktion?

Eine Funktion ist eine Art Rezept, wie man aus einer Zahl x eine andere Zahl y macht. Etwas präziser ausgedrückt:

> Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jeder Zahl x (aus dem Definitionsbereich von x) genau eine Zahl y zuordnet.

Z.B. kann die Funktion heissen "3 addieren"; auf jede Zahl (x), die du mir sagst, antworte ich mit einer um 3 grösseren Zahl ($= y$). Wir schreiben das als folgende Funktionsgleichung

$$y(x) = x + 3 \tag{67}$$

Für Funktionen gibt es im Allgemeinen drei mögliche Darstellungen: **Funktionsgleichung, Wertetabelle, Funktionsgraph**. Man sollte die Darstellung nicht mit der Funktion selbst verwechseln, selbst wenn der Sprachgebrauch dies manchmal suggeriert. Häufig nennt man beispielsweise den Funktionsgraphen einfach kurz Funktion, was viele zur Annahme verleitet, dass eine Funktion ein Diagramm ist. Das Diagramm ist aber nur eine Seite einer Funktion!
Die folgenden Funktionen solltet ihr am Anfang des Studiums kennen:

1. Lineare Funktionen (Funktionsgraph = Gerade)
2. Quadratische Funktionen (Funktionsgraph = Parabel)
3. Potenzfunktionen
4. Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen
5. Trigonometrische Funktionen: Sinus, Cosinus, Tangens

Leider haben wir nicht die Zeit auf alle diese Funktionen einzugehen. Wir konzentrieren uns in erster Linie auf lineare, quadratische und trigonometrische Funktionen.

3.5 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion hat eine Funktionsgleichung der Form

$$y(x) = a \cdot x + b \quad \text{oder} \quad y(x) = m \cdot x + b \,. \tag{68}$$

a (bzw. m) und b können dabei irgendwelche Zahlen sein. Man nennt sie *Koeffizienten* (oder *Parameter*). Ihre Bedeutung erkennen wir möglicherweise anhand der folgenden Aufgabe mit drei Beispielen:

Berechen eine Wertetabelle und skizziere den Funktionsgraphen für die folgenden drei linearen Funktionen (wähle selber eine geeignete Skala im Diagramm).

a) $f_1(x) = x+2$

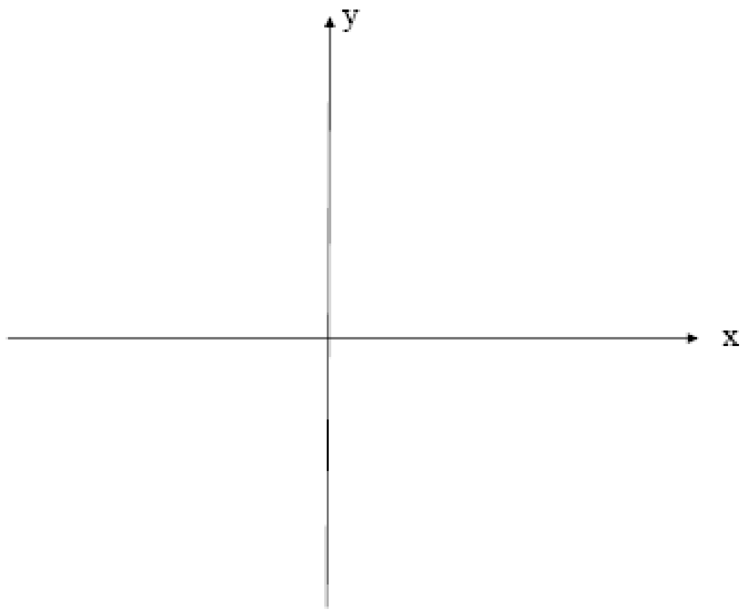
x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\mathbf{f_1}$								

b) $f_2(x) = x-1$

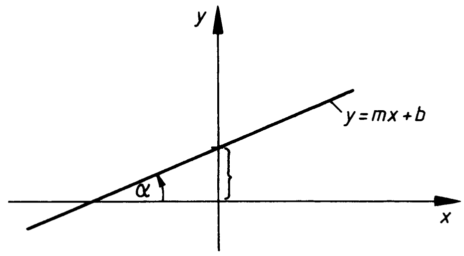
x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\mathbf{f_2}$								

c) $f_3(x) = 2x+2$

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$\mathbf{f_3}$								



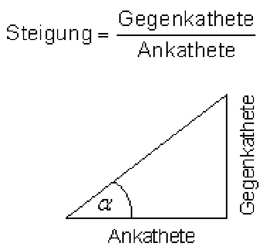
Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade:

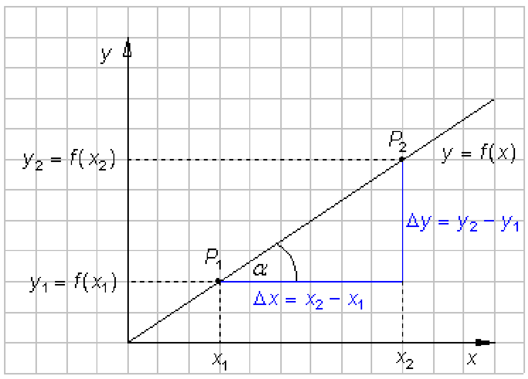


Bemerkung: Es sind verschiedene Schreibweisen für Punkte in einem $x-y-$Diagramm im Gebrauch. Bei uns wird es immer (x, y) sein (beachte die Trennung durch Komma).

Die Koeffizienten a (oder m) und b haben direkte, anschauliche Bedeutungen:

- Die Bedeutung von b erkennt man, wenn man die Stelle $x = 0$ betrachtet: b ist der $y-$Achsen–Abschnitt. Dort schneidet die Gerade die $y-$Achse.
- Die Bedeutung von a (bzw. m) erkennt man, wenn man den Anstieg Δy von y über ein Intervall $\Delta x = x_2 - x_1$ betrachtet:





$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + b - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} \qquad (69)\\
&= \frac{mx_2 + b - mx_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 + x_1)}{x_2 + x_1} = m
\end{aligned}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nennt man die *Steigung* der Geraden. Das Verhältnis "Gegenkathete zu Ankathete" in einem rechtwinkligen Dreieck wird auch als Tangens des Steigungswinkels α bezeichnet, kurz: $\tan(\alpha)$ (dazu mehr nächste Woche).

Bemerkung:

Vielleicht würdest du die Steigung von dir aus eher direkt durch α angeben? Das hätte aber einen Nachteil: α hängt von der Skalierung des Koordinatensystems ab, es steht ja nirgends geschrieben, dass die Schrittweite auf $x-$ und $y-$Achse die gleiche sein muss. Und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist auch gar keine so weltfremde Wahl; z.B. geben wir die Steigung einer Strasse auch so an: " 8% Steigung" heisst z.B. nichts anderes, als dass die Strasse über eine horizontale Distanz von 100 m ($= \Delta x$) um 8 m ansteigt ($= \Delta y$), $8\% = \frac{8\ m}{100\ m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3.6 Aufgaben

Die Angaben in Klammern beziehen sich auf die entsprechenden Aufgaben im Buch:
Jürgen Wendeler
Vorkurs der Ingenieurmathematik
Verlag Harry Deutsch , ISBN 3-8171-1670-5.
In diesem Buch gibt es eine umfangreichere Aufgabensammlung mit Lösungen.

Logarithmen

Aufgabe 1 (9.2)
Berechne (falls möglich ohne Rechner):

a) $\log(\sqrt{10^6})$	b) $\log(\sqrt[4]{10000})$
c) $\log_2(8)$	d) $\log_6(6)$
i) $\log_{\sqrt{3}}(27)$	l) $\log_{36}(1)$
m) $\log_{0.2}(13)$	

Aufgabe 2 (9.3)

Berechne x, falls möglich ohne Rechner

a) $10^x = 435$	b) $\log_2(\sqrt{2^3}) = x$
c) $\log_x(25) = 2$	d) $4^{\log_4(0.01)} = x$

Aufgabe 3 (9.4)
Zerlege so weit als möglich in Summanden:
a) $\log((a+b)^2\sqrt{d})$ b) $\ln\left(\frac{m-n}{\sqrt{m+n}}\right)$

Aufgabe 4 (9.8) (Beispiele aus der Physik)

a) $p = p_0 \cdot e^{-\rho \cdot g \cdot h/p_0}, \quad h = ?$
b) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(n-1)/n}, \quad n = ?$

Aufgabe 5
$\lg(2) \approx 0.30$, dein Taschenrechner wird das bestätigen. Versuche daraus (d.h. ohne Taschenrechner) zu berechnen:
a) $\lg(8) =$
b) $\lg(20) =$
c) $\lg(0.2) =$
d) $\lg(0.5) =$
e) $\lg(5) =$

Exponentialgleichungen

Aufgabe 6 (9.6)
Löse:
a) $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$
b) $3^{2(x+6)} \cdot 27^{x+6} = 243$
h) $\sqrt[x]{a} = b^x$
k) $a^{n-x} = 2b^x$

Aufgabe 7 (9.6)
Löse: h) $\sqrt[5]{a^{2x-1}} = \sqrt[4]{a^{3x-5}}$
c) $5 \cdot 2^{x+1} + 2 = 36 \cdot 2^x$ Hinweis: etwas tricky, zuerst umformen

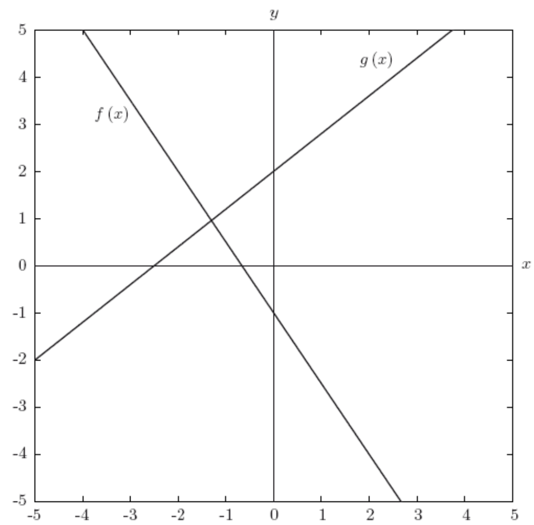
Exponentialgleichungen: Anwendungen (schwierig, wird im Studium aufgenommen und wird nicht als Vorwissen erwartet)

Aufgabe 8
Die Anzahl Bäume in einem Waldstück von $10'000\ m^2$ wird nach einem Sturm auf 1/3 der Fläche verwüstet (es verbleiben 2/3 der ursprünglichen Fläche). Der Holzbestand nimmt danach wieder jährlich um 6% zu. Wann ist die alte Fläche wieder erreicht? Stelle eine Exponentialgleichung auf und löse sie. Hinweis: 6% jährliche Zunahme bedeutet, dass der Wald jährlich um den Faktor 1.06 wächst.

Aufgabe 9
Eine radioaktive Substanz hat eine Halbwertszeit von 60 Tagen. Wann sind (ausgehend von 1 kg) nur noch 10 % des ursprünglichen Materials vorhanden? Stelle eine Exponentialgleichung auf und löse sie.

Lineare Funktionen

Aufgabe 10
a) Bestimme die Funktionsgleichungen der folgenden zwei linearen Funktionen:



b) Was ist $f(4)$?
c) Für welches x gilt $g(x) = 5$?

Aufgabe 11
Bestimme die Funktionsgleichung der linearen Funktion durch die Punkte $(x, y) = (1, 1)$ und $(x, y) = (-1, -3)$.

3.7 Lösungen

Aufgabe 1 (9.2)
a)$= \log(10^{6/2}) = \log(10^3) = 3$
b)$= \log(10000^{1/4}) = \frac{1}{4}\log(10000) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$
c)3
d) 1
i)$= \log_{3^{1/2}}(27) = \frac{\log_3(27)}{\log_3(3^{1/2})} = \frac{3}{1/2} = 6$
l)0, denn $36^0 = 1$, bzw. nur der Exponent Null macht eine Basis zu 1
m)-1.594 (mit TR: Basistransformation verwenden, $= \frac{\log(13)}{\log(0.2)}$)

Aufgabe 2 (9.3)
a) $x = 2.638$ (TR: $\log(435)$)
b)$x = \log_2(2^{3/2}) = \frac{3}{2}\log_2(2) = \frac{3}{2} \cdot 1 = 3/2$
c)umformen: $x^2 = 25$, daraus $x = 5$
d)$\log_4(0.01) = n$ erfüllt die Gleichung $4^n = 0.01$. Daraus folgt $x = 0.01$.

Aufgabe 3 (9.4)
a) $= \log((a+b)^2) + \log(d^{1/2}) = 2 \cdot \log(a+b) + 0.5 \cdot \log(d)$
b) $= \ln((m-n) \cdot (m+n)^{-1/2}) = \ln(m-n) + \ln((m+n)^{-1/2}) = \ln(m-n) - 0.5\ln(m+n)$

Aufgabe 4 (9.8)

a) Beidseitig den ln anwenden ergibt:

$$\begin{aligned}
\ln(p) &= \ln(p_0 \cdot e^{-\rho \cdot g \cdot h/p_0} \\
\ln(p) &= \ln(p_0) + \ln(e^{-\rho \cdot g \cdot h/p_0}) \\
\ln(p) &= \ln(p_0) - \rho \cdot g \cdot h/p_0 \\
\frac{\ln(p) - \ln(p_0)}{-\rho \cdot g} &= h/p_0 \\
p_0\frac{\ln(p) - \ln(p_0)}{-\rho \cdot g} &= h
\end{aligned}$$

Umformen ergibt $h = \frac{p_0}{\rho g}(\ln(p_0) - \ln(p))$

b) Beidseitig den ln anwenden ergibt:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) &= \ln\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(n-1)/n}\right) \\
\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) &= \frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\
n\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) &= (n-1)\cdot\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\
n\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) &= n\cdot\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - 1\cdot\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\
n\cdot\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - n\cdot\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) &= -\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\
n\cdot\left(\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right) &= -\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \\
n &= \frac{-\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}
\end{aligned}$$

Kürzen des Minus ergibt $n = \frac{\ln(\frac{p_1}{p_2})}{ln(\frac{p_1}{p_2}) - \ln(\frac{T_1}{T_2})}$

Aufgabe 5

a) $\lg(8) = 3\lg(2) = 0.9$
b) $\lg(20) = \lg(2\cdot 10) = \lg(2) + \lg(10) = 1.3$
c) $\lg(0.2) = \lg(2/10) = \lg(2) - \lg(10) = -0.7$
d) $\lg(0.5) = \lg(1/2) = \lg(1) - \lg(2) = -0.3$
e) $\lg(5) = \lg(10\cdot 0.5) = \lg(10) + \lg(0.5) = 0.7$

Aufgabe 6 (9.6)

a)

$$\begin{aligned}
\log(2^{6x-2} &= \log(4^{2x+3} \\
(6x-2)\log 2 &= (2x+3)\log 4 \\
6x\log 2 - 2\log 2 &= 2x\log 4 + 3\log 4 \\
6x\log 2 - 2x\log 4 &= 3\log 4 + 2\log 2 \\
x(6\log 2 - 2\log 4) &= 3\log 4 + 2\log 2 \\
x &= \frac{3\log 4 + 2\log 2}{6\log 2 - 2\log 4}
\end{aligned}$$

Da $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$, folgt aus obigem Resultat, dass $x = \frac{6\log 2 + 2\log 2}{6\log 2 - 4\log 2} = \frac{8\log 2}{2\log 2} = 4$

b)

$$\begin{aligned}
\log\left(3^{2(x+6)}\cdot 27^{x+6}\right) &= \log(243)\\
\log\left(3^{2(x+6)}\right)+\log\left(27^{x+6}\right) &= \log 243\\
2(x+6)\log 3+(x+6)\log 27 &= \log 243\\
2x\log 3+12\log 3+x\log 27+6\log 27 &= \log 243\\
x(2\log 3+\log 27) &= \log 243-12\log 3-6\log 27\\
x &= \frac{\log 243-12\log 3-6\log 27}{2\log 3+\log 27}\\
x &= \frac{\log 3^5-12\log 3-6\log 3^3}{2\log 3+\log 3^3}\\
x &= \frac{5\log 3-12\log 3-18\log 3}{2\log 3+3\log 3}
\end{aligned}$$

Es folgt $x=\frac{-25\log 3}{5\log 3}=-5$

h)

$$\begin{aligned}
\log(\sqrt[x]{a}) &= \log(b^x)\\
\log(a^{1/x}) &= \log(b^x)\\
\frac{1}{x}\log(a) &= x\log(b)\\
\log a &= x^2\log b\\
x^2 &= \frac{\log a}{\log b}
\end{aligned}$$

und daraus (z.B. mit ln) $x=\pm\sqrt{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}$

k)

$$\begin{aligned}
\log(a^{n-x}) &= \log(2\cdot b^x)\\
(n-x)\log a &= \log 2+\log b^x\\
(n-x)\log a &= \log 2+x\log b\\
n\log a-x\log a &= \log 2+x\log b\\
n\log a-\log 2 &= x\log b+x\log a\\
n\log a-\log 2 &= x(\log b+\log a)\\
\frac{n\log a-\log 2}{\log b+\log a} &= x
\end{aligned}$$

und daraus z.B. mit ln: $x=\frac{n\ln(a)-\ln(2)}{\ln(a)+\ln(b)}$

Aufgabe 7 (9.6)

h)

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt[5]{a^{2x-1}}\right) &= \log\left(\sqrt[4]{a^{3x-5}}\right)\\
\log\left(a^{\frac{1}{5}(2x-1)}\right) &= \log\left(a^{\frac{1}{4}(3x-5)}\right)\\
\frac{1}{5}(2x-1)\log a &= \frac{1}{4}(3x-5)\log a\\
\frac{1}{5}(2x-1) &= \frac{1}{4}(3x-5)\\
\frac{2}{5}x-\frac{1}{5} &= \frac{3}{4}x-\frac{5}{4}\\
\frac{8}{20}x-\frac{4}{20} &= \frac{15}{20}x-\frac{25}{20}\\
8x-4 &= 15x-25\\
-7x &= -21
\end{aligned}$$

und daraus $x = 3$

c) Bemerke: $36 \cdot 2^x = 18 \cdot 2^{x+1}$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2^{x+1} + 2 &= 36 \cdot 2^x\\
5 \cdot 2^{x+1} + 2 &= 18 \cdot 2^{x+1}\\
2 &= 13 \cdot 2^{x+1}\\
\frac{2}{13} &= 2^{x+1}\\
\log\frac{2}{13} &= \log 2^{x+1}\\
\log\frac{2}{13} &= (x+1)\log 2\\
\log\frac{2}{13} &= x\log 2 + \log 2\\
\frac{\log\frac{2}{13} - \log 2}{\log 2} &= x\\
\frac{\log 2 - \log 13 - \log 2}{\log 2} &= x\\
\frac{-\log 13}{\log 2} &= x\\
\frac{\log\frac{1}{13}}{\log 2} &= x
\end{aligned}$$

und damit $x = \log(1/13)/\log(2) = -3.7$

Aufgabe 8
Analogie zum Sparbuch, mit Zins von 6%, Kapital CHF 1'000. Dies ergibt nach einem Jahr einen Betrag von $1'000 \cdot (1.06)$, nach zwei Jahren $(1'000 \cdot 1.06) \cdot 1.06$, nach drei Jahren $((1'000 \cdot 1.06) \cdot 1.06) \cdot 1.06$, usw. Nach n Jahren ergibt sich so ein Guthaben von $1'000 \cdot 1.06^n$. Beim Wald, der aus $\frac{2}{3} \cdot 10'000m^2$ besteht und mit 6% pro Jahr wächst, ergibt dies die Gleichung

$$2/3 \cdot 10'000 \cdot 1.06^n = 10'000$$

Dies ist eine Exponentialgleichung, die wir lösen können:

$$\begin{aligned}
2/3 \cdot 10'000 \cdot 1.06^n &= 10'000 \\
2/3 \cdot 1.06^n &= 1 \\
2 \cdot 1.06^n &= 3 \\
\log(2 \cdot 1.06^n) = \log 3 & \\
\log 2 + \log 1.06^n = \log 3 & \\
\log 2 + n \log 1.06 = \log 3 & \\
n &= \frac{\log 3 - \log 2}{\log 1 - 06} = 6.96
\end{aligned}$$

Es dauert also 6.96 Jahre, bis der Wald seine ursprünglich Grösse wieder erreicht hat.

Aufgabe 9
Halbwertzeit heisst, dass nach dieser Zeit noch 50% des Materials radioaktiv ist, d.h., wir können die Gleichung aufstellen: $1/10 \cdot 1 = 0.5^{x/60} \cdot 1$ (Exponentialgleichung) und erhalten das Resultat x in Tagen. Diese Gliechung logarithmieren wir beidseitig und erhalten nach Umformen die Lösung: $x = 60 \cdot \log(1/10)/\log(0.5) = 199.32$ Tage.

Aufgabe 10
a) $f(x) = -6/4 \cdot x - 1$ (achte auf den Punkt links oben bei $x = -4$ und $y = 5$, sowie $x = 0$, $y = -1$) und $g(x) = 4/5 \cdot x + 2$ (achte auf den Punkt links unten bei $x = -5$, $y = -2$, sowie $x = 0$, $y = 2$)
b)$f(4) = -7$ b)$5 = 4/5 \cdot x + 2 \quad \rightarrow \quad x = 15/4 = 3.75$

Aufgabe 11
Bedingungen: $a \cdot 1 + b = 1$ und $a \cdot (-1) + b = -3$. Zwei lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten a und b. Lösung: $a = 2$ und $b = -1$.
Die gesuchte Funktion ist $f(x) = 2x - 1$.

4 Vierter Kursmorgen

4.1 Lernziele

Quadratische Funktionen

- Ihr kennt die Eigenschaften von quadratischen Funktionen und könnt diese anhand der Parameter a, b und c skizzieren.
- Ihr könnt quadratische Funktionen anhand der Angabe von drei Punkten bestimmen.

Nullstellen

- Ihr wisst, wie man Nullstellen und Schnittpunkte bei linearen und quadratischen Funktionen berechnet und könnt dieses Wissen schnell und sicher auf Aufgaben anwenden.

Trigonometrische Funktionen

- Ihr wisst, wie man Winkel in Grad-und Bogenmass misst und könnt das eine in das andere umrechnen.
- Ihr kennt die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens und ihre Umkehrfunktionen und könnt diese verwenden um Unbekannt Grössen in einem Dreieck zu berechnen.
- (fakultativ, nicht als Vorwissen vorausgesetzt:)Ihr wisst, wie die Winkelfunktionen am Einheitskreis dargestellt sind.

4.2 Quadratische Funktionen

In quadratischen Funktionen wird das Argument, wie schon der Name andeutet, quadriert. Als allgemeine Form schreibt man meist

$$y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{70}$$

Was ist die Rolle der Koeffizienten a, b und c? Machen wir dazu auch wieder eine Übung.
Man stelle eine Wertetabelle zusammen und skizziere den Graphen für die folgenden quadratischen Funktionen:

1) $f(x) = x^2 - 1$

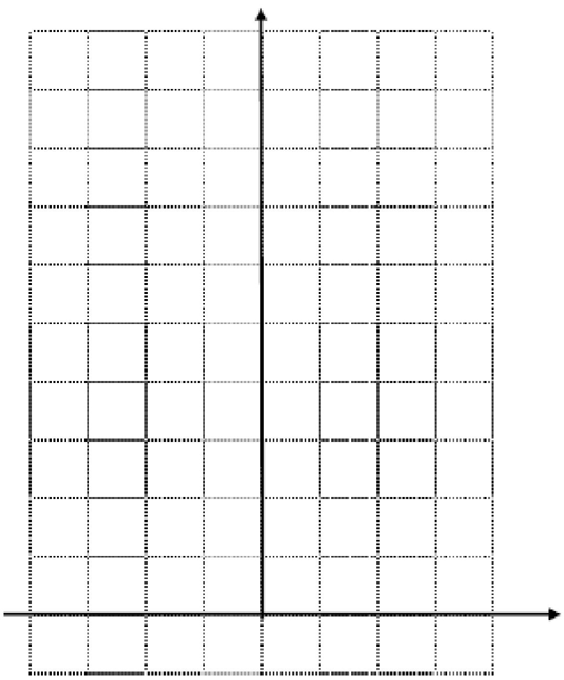
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2) $f(x) = -x^2 + 9$

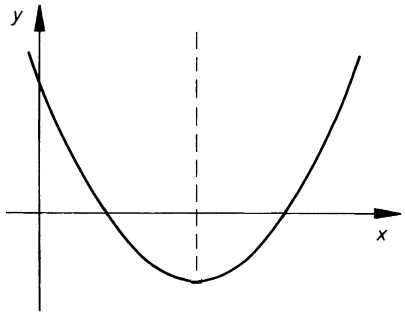
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

3) $f(x) = x^2 - x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



Der Graph ist eine Parabel mit Symmetrie–Achse parallel zur $y-$Achse:

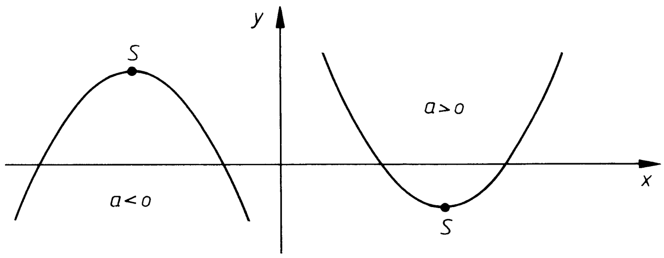


Ihren Scheitelpunkt hat die Parabel bei

$$x_S = -\frac{1}{2}\frac{b}{a}, \quad y_S = a \cdot x_S^2 + b \cdot x_S + c \tag{71}$$

Diese Formel ist im Moment nicht offensichtlich. Wir werden sie hier auch nicht herleiten.
Die Koeffizienten a, b und c haben eine anschauliche Interpretation:

1. a sagt etwas über die *Öffnung* der Parabel:
   - Positives a bedeutet Öffnung nach oben / der Scheitelpunkt ist das absolute Minimum der Funktion.
   - Negatives a bedeutet Öffnung nach unten / der Scheitelpunkt ist das absolute Maximum der Funktion.

   - Je grösser a *betragsmässig* ist, desto enger ist die Parabel, und umgekehrt.
2. b steht beim linearen Term, d.h. beim Term mit x; ein Blick auf (71) zeigt, dass die Parabel $y-$Achsen–symmetrisch ist, wenn $b = 0$ ist; sie ist nach rechts verschoben, wenn sich a und b im Vorzeichen unterscheiden; bei gleichem Vorzeichen von a und b ist die Parabel nach links verschoben. Das Verhältnis b/a ist ein Mass für die Grösse der Verschiebung von der $y-$Achse weg. Dies geht auch aus der Formel für den Scheitelpunkt hervor.
3. $x = 0$ setzen, und man sieht, was c bedeutet: c ist der $y-$Achsen–Abschnitt.

4.3 Nullstellen und Schnittpunkte

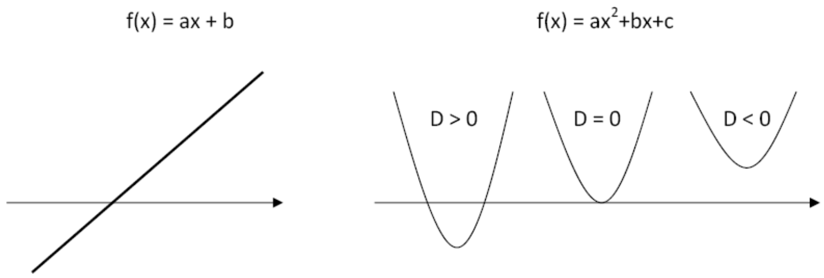
Nullstellen sind Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der $x-$Achse. Die Bedingung für eine Nullstelle ist, dass der Funktionswert $y = 0$ wird (daher der Name). Bei linearen Funktionen muss man daher die Gleichung

$$ax + b = 0 \tag{72}$$

und bei quadratischen Funktionen die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{73}$$

nach x auflösen, um die Nullstelle(n) zu finden.
Umgekehrt kann man die Lösung(en) jeder linearen bzw. quadratischen Gleichung als Nullstellen einer entsprechenden Funktion interpretieren. Dies gibt uns insbesondere eine sehr anschauliche Erklärung, warum eine lineare Gleichung eine Lösung, eine quadratische Gleichung dagegen 0, 1 oder 2 Lösungen haben kann.



Schnittpunkte zwischen zwei (linearen oder quadratischen) Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ findet man auf ähnliche Weise. Die Bedingung für einen Schnittpunkt ist offensichtlich, dass bei Einsetzen des x bei beiden Funktionen das gleiche y herauskommt. Deswegen muss man bei der Suche nach Schnittpunkten einfach die Funktionsgleichungen gleich setzen. Dies führt zu einer linearen oder quadratischen Gleichung für die Koordinate x.

Beispiel: Finde die Schnittpunkte von $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = x + 1$.
Lösung:

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \tag{74}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die zugehörigen $y-$Werte findet man durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen ($y_1 = 0$ und $y_2 = 3$).

4.4 Trigonometrische Funktionen

In diesem Kapitel ist es wichtig, dass Du Dir die beschriebenen Situationen mit Hilfe von Skizzen anschaulich notierst.

4.4.1 Winkel im Grad-und Bogenmass

Was ist ein Winkel? Im Gegensatz zu einer Streckenlänge wird ein Winkel nicht in einem Absolutmass wie cm oder m gemessen (eigentlich sind Längen keine Absolutmasse, denn irgendwann wurde die Länge eines Meters einmal exemplarisch definiert). Ein Winkel wird als Proportion zum Kreisbogen gemessen. Am besten kennen wir die Einteilung eines Kreisbogens in 360 Stücke, genannt das Gradmass. Ein Winkel von 60^o umfasst also $60^o/360^o = 1/6$ des ganzen Kreisbogens. Neben der willkürlichen Einteilung des Kreises in 360 Stücke gibt es diverse andere Möglichkeiten. Die Mathematiker ziehen das **Bogenmass** vor. Hier hat der Kreisbogen (auch Vollwinkel genannt) die Grösse 2π. Dies entspricht genau der Länge eines Kreisbogens mit Radius $r = 1$ (der Umfang eines Kreises mit Radius r ist $2\pi r$).

Die verschiedenen Winkelmasse kïnnen ineinander umgerechnet werden. Dazu empfiehlt es sich, zuerst den Winkel als Teil des gesamten Kreisbogen in demselben Mass auszudrücken ($60^o = 60^o/360^o = 1/6$). Dann multipliziert man Dieses Verhältnis mit der Gesamtlänge des Kreisbogens im Mass, in welches man umrechnen möchte. Beim Bogenmass wäre das 2π. Also entsprechen 60^o im Bogenmass $1/6 \times 2\pi = \pi/3$.

Im Bogenmass kann man "rad" (für "Radiant") als Masseinheit benützen oder gar nichts, denn im Bogenmass werden zwei Längen durcheinander dividiert. Also ist das Bogenmass ein dimensionsloses Verhältnis. Grad-und Bogenmass sind leider eine beliebte Quelle für Rechenfehler. Taschenrechner können in der Regel in beiden Winkeleinheiten rechnen (du musst ihn aber entsprechend einstellen! Vorsicht: DEG ist Gradmass, RAD für Radians ist Bogenmass, GRAD für Gradians ist ein Mass mit Vollkreis in 400 Stücken und DEG für Degrees ist das herkömmliche Gradmass mit 360 Einheiten).

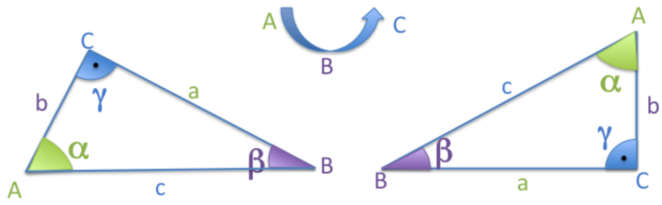
Umrechnungsformeln:
α in Gradmass => $\alpha' = \frac{\alpha}{360} \times 2\pi$ in Bogenmass
α' in Bogenmass => $\alpha = \frac{\alpha'}{2\pi} \times 360$ in Gradmass

4.4.2 Winkelfunktionen im Dreieck

Dreiecke, besonders rechtwinklige, gehören zu den elementarsten Strukturen der Geometrie. Die Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke sind einerseits durch den Satz von Pythagoras miteinander verknüpft:

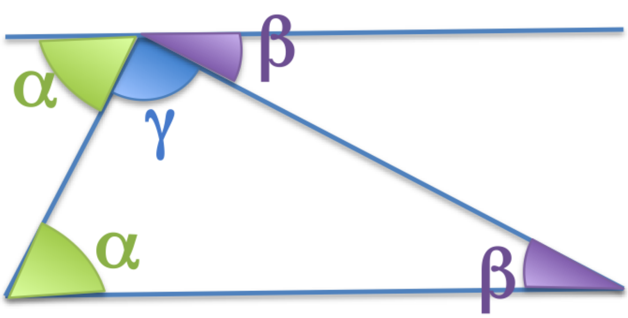
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{75}$$

(a und b sind die **Katheten**, c die **Hypotenuse**), andererseits über die trigonometrischen Funktionen mit den Winkeln. Dazu gleich mehr. Zuerst wollen wir die Benennung der Seiten, Winkel und Punkte anschauen, dazu gibt es eine Standardkonvention, die in der Figur unten gezeigt ist.



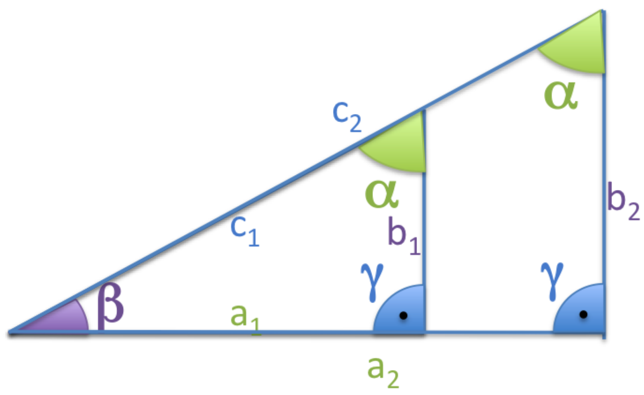
Der rechte Winkel (für rechtwinklige Dreiecke) wird mit γ bezeichnet (sprich: Gamma). Am Winkel γ liegt der Punkt C. Gegenüber dem Punkt C liegt die Strecke c, auch Hypothenuse genannt. Geht man von C im Uhrzeigersinn weiter, so heisst der nächste Punkt B, der zugehörige Winkel β (sprich Beta). B gegenüber liegt die Strecke b. Der letzte Punkt im Uhrzeigersinn ist A mit dem Winkel α (sprich Alpha) und der gegenüberliegenden Seite a.
Manchmal beobachtet man auch andere Konventionen, es empfiehlt sich jedoch, wie oben beschrieben vorzugehen. Etwas intellektuellere Begriffe existieren für die Seitenbezeichnungen ausgehend von einem Winkel. Für den Winkel α nennen wir die Strecke a Gegenkathete, die Strecke b Ankathete, und die Strecke c heisst (unabhänging vom Winkel) Hypothenuse. Für den Winkel β wäre a die Ankathete und b die Gegenkathete.

Zu beachten ist, dass im Rechtwinkligen Dreieck nur 1 Winkel frei gewählt werden kann, denn die Summe der drei Winkel muss immer 180^o ergeben, wie das Bild unten beweist.



Haben wir z.B. $\alpha = 30^o$ im rechtwinklingen Dreieck gewählt, so folgt $\beta = 60^o$ aus $180^o - 90^o - 30^o$.

Die Winkelfunktionen plausibilisieren sich am intuitivsten mithilfe der Strahlensätze aus der Geometrie (Hintergründe und Beweise siehe Wikipedia zu Strahlensatz). Im Bild unten sehen wir zwei Dreiecke, welche dieselben Winkel haben, aber unterschiedliche Streckenlängen. Die Längen mit Index 1 gehören zum kleinen Dreieck, diejenigen mit Index 2 zum grossen.



Die Strahlensätze besagen nun, dass die Verhältnisse einzelner Strecken in beiden Dreiecken identisch sind:

$$\frac{a_2}{c_2} = \frac{a_1}{c_1}$$
$$\frac{b_2}{c_2} = \frac{b_1}{c_1}$$
$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1}$$

Die Werte dieser Verhältnisse hängen einzig von den Winkeln im Dreieck ab, da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, sogar nur von einem Winkel, da der andere aus der Winkelsumme von 180^o folgt. Anhand der Skizze ist es am intuitivsten, wenn wir das Dreieck durch den Winkel β beschreiben.
Die Winkelfunktionen sind nun eine Zuordnung von einem Winkel, β, zu einem Seitenverhältnis. Man kann sich hier erstmal eine Wertetabelle vorstellen, in der für ganz viele Winkel die entsprechenden Verhältnisse der Seiten eingetragen sind. Die wichtigsten dieser Wertetabellen / trigonometrischen Funktionen sind

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \tag{76}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \tag{77}$$

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \tag{78}$$

Analog sind definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \tag{79}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \tag{80}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{81}$$

Im Taschenrechner sind diese Wertetabellen gespeichert. Seid vorsichtig, dass Ihr hier nicht Grad (DEG) und Bogenmass (RAD) durcheinanderbringt.
Kennen wir also beispielsweise von einem rechtwinkligen Dreieck die Seite $c = 2$ und den Winkel $\beta = 30^o$, so können wir alle anderen Winkel und Seiten im Dreieck daraus berechnen:

- $\alpha = 180^o - 90^o - 30^o = 60^o$.
- Da $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$, so ist $a = c\cos(\beta) = 2\cos(30^o) = 2 \times 0.866 = 1.732$.
- Da $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$, so ist $b = c\sin(\beta) = 2\sin(30^o) = 2 \times 0.5 = 1$.

4.4.3 Die Umkehrfunktionen

Manchmal ist nicht der Winkel gegeben, sondern zum Beispiel der Sinus, also das Verhältnis der Seiten, und man soll herausfinden, welcher Winkel dazu passt. Welches α hat denn etwa $\sin(\alpha) = 0.5$? Das beantwortet der Arcus–Sinus:

$$\sin(\alpha) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \arcsin(y) \tag{82}$$

Statt $\arcsin(x)$ schreibt man auch $asin(x)$ oder $\sin^{-1}(x)$. Die letzte Variante ist die am meisten verbreitete. Sie ist aber missverständlich, da sie auch den Reziprokwert ($\frac{1}{\sin(x)}$) angeben könnte. Die Funktion ist auf jedem Taschenrechner vorhanden (Achte darauf, ob Du in Grad-oder Bogenmass rechnen sollst!). Die beiden andern Umkehrfunktionen sind:

$$\cos(\alpha) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \arccos(x) \tag{83}$$

$$\tan(\alpha) = z \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \arctan(z) \tag{84}$$

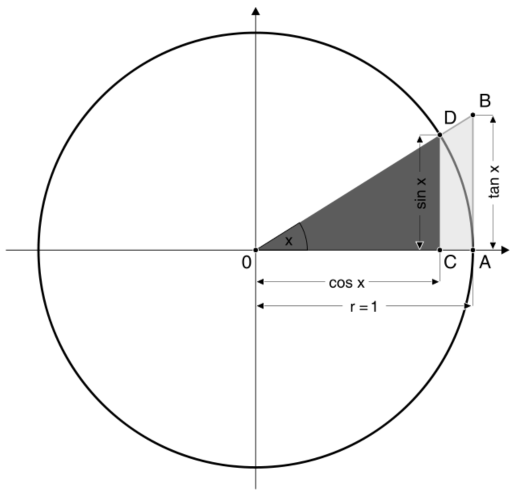
Mit den Umkehrfunktionen lassen sich z.Bsp. Winkel und Seiten in einem Dreieck berechnen mit gegebenen Seiten $a = 1$ und $b = 2$:

- Da $\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{2}{1}$, so ist $\beta = atan(2) = 63.43^o$.
- Damit folgt $\alpha = 180^o - 90^o - 63.43^o = 26.57^o$.
- Die Strecke c liesse sich mit dem Satz von Pythagoras berechnen ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$), oder aus $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$, also $c = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{2}{\sin(63.43^o)} = \frac{2}{0.89} = 2.24$.

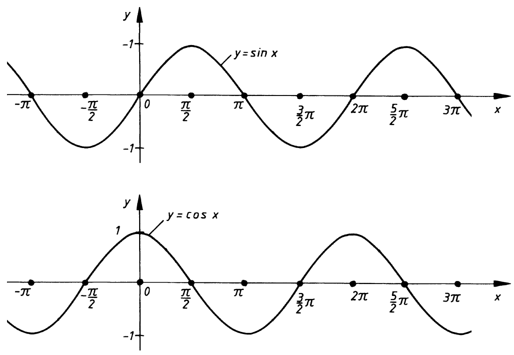
Die Umkehrfunktion hält einige Schwierigkeiten bereit, die aber nicht Vorbereitungspflicht fürs Studium sind. Einige dieser Schwierigkeiten werden in den nun folgenden, fakultativen Abschnitten behandelt.

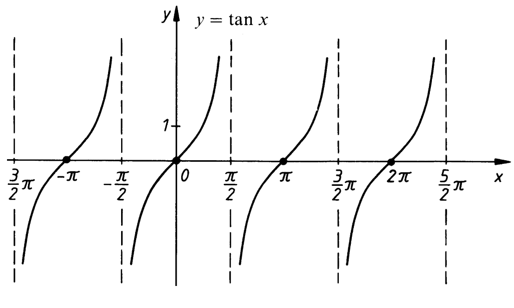
4.4.4 Die Darstellung am Einheitskreis (nicht vorbereitungsrelevant, wird im Studium behandelt.)

Die trigonometrischen Funktionen können auch geometrisch in der Darstellung am Einheitskreis (Kreis mit Radius $r = 1$) interpretiert werden. Insbesondere gilt, dass $\cos(x)$ gleich der $x-$Koordinate und $\sin(x)$ gleich der $y-$Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis ist.



Die trigonometrischen Funktionen haben in Technik und Wissenschaften eine sehr grosse Bedeutung, und zwar oft ohne einen direkt ersichtlichen Zusammenhang mit Winkeln oder Dreiecken. Die Funktionsgraphen sehen so aus:





Hier wird x – würde man es als Winkel interpretieren – in Bogenmass gemessen. Als Ingenieur sollte man diese Kurven jederzeit vor dem innern Auge abrufen können. Näheres zur Bedeutung der Funktionen erfahrt ihr im Studium.

Übrigens: Schwingungen
Die Position einer an einer Feder aufgehängten Masse wird durch die Funktion

$$f(t) = A \sin(\omega \cdot t + \phi) \tag{85}$$

beschrieben. Doch was bedeutet das alles genau? Wofür stehen die Symbole? (ω ist übrigens ein kleines Omega und nicht ein w).
Im Buch von Knorrenschild (S.139-140) findest Du dazu mehr Informationen. Schwingungen werden dir im Studium immer wieder begegnen.

4.5 Aufgaben

Quadratische Funktionen / Nullstellen / Schnittpunkte

Aufgabe 1
Bringe die Funktionsgleichungen auf die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimme dann die Nullstellen, Achsenschnittpunkte (x und $y-$Achse), und die Scheitelpunkte der Parabeln und skizziere die Graphen:
a) $f(x) = (x-1)^2 - 1$
b) $f(x) = (x-2)^2 - 1$
c) $f(x) = -(x+1)^2$
d) $f(x) = x^2 - 4x + 9$
e) Was fällt dir auf, wenn du die $x-$Koordinaten der Scheitelpunkte mit den unter a)b)c) gegebenen ursprünglichen Funktionsgleichungen vergleichst?

Aufgabe 2
Bestimme die Schnittpunkte der Funktionen $f(x) = 2x^2+x$ und $g(x) = -x+12$.

Aufgabe 3
Bestimme die Koeffizienten einer quadratischen Funktion so, dass die Parabel durch die Punkte $(0,1)$, $(1,2)$ und $(-1,-2)$ geht.

Trigonometrie

Aufgabe 1
Rechne in Bogenmass um:
a) $\alpha = 180°$
b) $\alpha = 134°$
c) $\alpha = 32°$
d) $\alpha = 400°$
Rechne in Gradmass um:
a) $\alpha = \pi/4$
b) $\alpha = 1.2$
c) $\alpha = \pi/3$

Aufgabe 2 (10.2)
Vereinfache (verwende die Definitionen):
a) $\frac{\tan(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
c) $\tan(\alpha)\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$

Aufgabe 3 (10.8)
Man bestimme α mit dem Taschenrechner in den ersten vier Quadranten (zwischen 0° und 360°; nur teilweise vorbereitungsrelevant):
a) $\sin(\alpha) = 0.5314$
b) $\cos(\alpha) = -\sqrt{3}/2$
c) $\tan(\alpha) = 0.75$
e) $\sin(\alpha) = -0.3736$

Aufgabe 4
a) Für ein rechtwinkliges Dreieck sind gegeben: $b = 2.53$ cm, $c = 3.88$ cm
Berechne die fehlenden Grössen.

b) Für ein rechtwinkliges Dreieck sind gegeben: $b = 2$, $\beta = 20^o$

Berechne die fehlenden Grössen.

c) Für ein rechtwinkliges Dreieck sind gegeben: $a = 3$, $\alpha = 40^o$
Berechne die fehlenden Grössen.

Aufgabe 5 (10.10; nicht vorbereitungsrelevant)
Löse nach x auf:
a) $4\sin(x) + 3 = 0$
b) $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$

4.6 Lösungen

Quadratische Funktionen / Nullstellen / Schnittpunkte

Aufgabe 1
a) Scheitelpunkt $(x_S, y_S) = (1, -1)$, Nullstellen $(0, 0)$, $(2, 0)$, y-Achsenabschnitt $(0, 0)$
b) Scheitelpunkt $(x_S, y_S) = (2, -1)$, Nullstellen $(1, 0)$, $(3, 0)$, y-Achsenabschnitt $(0, 3)$
c) Scheitelpunkt $(x_S, y_S) = (-1, 0)$, Nullstellen $(-1, 0)$, y-Achsenabschnitt $(0, -1)$
d) Scheitelpunkt $(x_S, y_S) = (2, 5)$, Nullstellen keine, y-Achsenabschnitt $(0, 9)$
e) Die Funktionsformel $f(x) = (x - u)^2 + a_0$ ist die so genannte Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion. Die $x-$Koordinate des Scheitelpunkts ist $x_S = u$.

Aufgabe 2
An den Schnittpunkten müssen die beiden Funktionen f und g dieselben x und dieselben y Werte haben. Dies führt auf die Gleichung $f(x) = g(x)$, also $2x^2 + x = -x + 12$. Dies ist eine quadratische Gleichung, welche wir lösen können (Auflösungsformel). Man erhält $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Die zugehörigen y-Werte erhalten wir durch einsetzen in eine der beiden Funktionen (es sollte $f(x_1) = g(x_1)$, sowie $f(x_2) = g(x_2)$ sein, deshalb kommt es nicht darau an, welche Funktion für das Bestimmen der y-Werte verwendet wird. Man erhält:
$(x_1, y_1) = (2, 10)$ und $(x_2, y_2) = (-3, 15)$

Aufgabe 3
Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$. Da $f(0) = 1$ gilt $c = 1$. Löse dann das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 &= 2 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 &= -2 \end{aligned} \qquad (86)$$

nach a und b auf.
Lösung: $a = -1, b = 2$, also $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

Trigonometrie

Aufgabe 1
a) $\alpha = \pi = 3.1416$
b) $\alpha = \pi \cdot 134/180 = 2.34$
c) $\alpha = 32\pi/180 = 0.559$

d) $\alpha = 400\pi/180 = 6.98$

a) $\alpha = 45°$
b) $\alpha = 1.2 \cdot 360/(2\pi) = 68.75°$
c) $\alpha = 60°$

Aufgabe 2 (10.2)
Vereinfache:
a) $\frac{1}{\cos(\alpha)}$
c) $\sin(\alpha)$

Aufgabe 3 (10.8)
Die zweite Lösung ergibt sich aus geometrischen Überlegungen. Diese führen im Rahmen des Vorkurs zu weit (wird in den Vorlesungen aufgegriffen; relevant für die Vorbereitung ist nur die erste Lösung).
a) $\alpha_{1,2} = 32.1°, 147.9°$
b) $\alpha_{1,2} = 150°, 210°$
c) $\alpha_{1,2} = 36.87°, 216.87°$
e) $\alpha_{1,2} = 338.06°, 201.93°$

Aufgabe 4
a) $\alpha = acos(b/c) = acos(2.53/3.88) = 49.3°$ und $a = 2.94$ cm (Pythagoras $a^2 = c^2 - b^2$). $\beta = 180^o - 90^o - 49.3^o = 40.7^o$

b) $\frac{b}{c} = \sin(\beta)$ liefert $c = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{2}{0.34} = 5.85$. Mit $\tan(\beta)\frac{b}{a}$ ergibt sich $a = \frac{b}{\tan(\beta)} = \frac{2}{0.36} = 5.49$. $\alpha = 180^o - 90^o - 20^o = 70^o$.

c) $\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$ liefert $c = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{3}{0.64} = 4.67$. Mit $\tan(\alpha)\frac{a}{b}$ ergibt sich $b = \frac{a}{\tan(\alpha)} = \frac{3}{0.84} = 3.58$. $\beta = 180^o - 90^o - 40^o = 50^o$.

Aufgabe 5 (10.10) etwas schwieriger, führt im Rahmen des Vorkurs zu weit. Wird in den Vorlesungen wieder aufgegriffen und ist nicht vorbereitungsrelevant.
a) $x_1 = 228,06°, x_2 = 311.4°$, b)$x_1 = 30°, x_2 = 210°, x_3 = 60°, x_4 = 240°$